

Deduzione automatica: sostituzioni e unificazione

Una **sostituzione** è un insieme finito della forma:

$$\{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$$

dove:

- x_1, \dots, x_n sono variabili
- t_1, \dots, t_n sono termini
- per ogni i , $t_i \neq x_i$
- per ogni i, j se $i \neq j$ allora $x_i \neq x_j$

Applicazione di una sostituzione a un'espressione:

se E è un'espressione e $\theta = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$ una sostituzione, $E\theta$ è l'**istanza** di E che si ottiene sostituendo **simultaneamente** ogni occorrenza di x_i con t_i (per $1 \leq i \leq n$).

Esempio:

$$\text{se } \theta = \{f(z, z)/x, c/z\}$$

$$p(f(x, y), x, g(z))\theta = p(f(f(z, z), y), f(z, z), g(c))$$

Composizione di sostituzioni ($\theta \circ \sigma$)

Se $\theta = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$ e $\sigma = \{u_1/y_1, \dots, u_m/y_m\}$, allora

$$\theta \circ \sigma$$

si ottiene da

$$\{t_1\sigma/x_1, \dots, t_n\sigma/x_n, u_1/y_1, \dots, u_m/y_m\}$$

eliminando tutti gli elementi:

$$\begin{aligned} & t_j\sigma/x_j \text{ tali che } t_j\sigma = x_j \\ & u_i/y_i \text{ tali che } y_i \in \{x_1, \dots, x_n\} \end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{aligned} \theta &= \{f(y)/x, z/y\} \\ \sigma &= \{a/x, b/y, y/z\} \end{aligned}$$

$\theta \circ \sigma$ si ottiene da

$$\{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}$$

eliminando $a/x, b/y, y/y$:

$$\theta \circ \sigma = \{f(b)/x, y/z\}$$

Proprietà fondamentale della composizione di sostituzioni

Per ogni espressione E :

$$E(\theta \circ \sigma) = (E\theta)\sigma$$

Esempio: siano

$$\begin{aligned} E &= h(x, g(y), z) \\ \theta &= \{f(y)/x, z/y\} \\ \sigma &= \{a/x, b/y, y/z\} \\ \theta \circ \sigma &= \{f(b)/x, y/z\} \end{aligned}$$

$$h(x, g(y), z)(\theta \circ \sigma) = h(x, g(y), z)\{f(b)/x, y/z\} = h(f(b), g(y), y)$$

$$(h(x, g(y), z)\theta)\sigma = h(f(y), g(z), z)\sigma = h(f(b), g(y), y)$$

Una sostituzione θ è un **unificatore** per l'insieme di espressioni $\{E_1, \dots, E_k\}$ sse:

$$E_1\theta = E_2\theta = \dots = E_k\theta$$

L'insieme $\{E_1, \dots, E_k\}$ è **unificabile** sse esiste un unificatore per esso

Unificatore più generale

Un unificatore σ per $\{E_1, \dots, E_k\}$ è un unificatore più generale (**mgu** = most general unifier) di $\{E_1, \dots, E_k\}$ sse per ogni unificatore θ di $\{E_1, \dots, E_k\}$ esiste una sostituzione λ tale che $\theta = \sigma \circ \lambda$.

Cioè ogni altro unificatore θ dell'insieme di espressioni “sostituisce di più” di σ : per ogni espressione E

$$E\theta = (E\sigma)\lambda$$

$\theta = \{f(a)/x, a/y\}$ è un unificatore per $\{p(x), p(f(y))\}$, ma non è un mgu.

Infatti per “unificare” $p(x)$ con $p(f(y))$ è sufficiente sostituire x con $f(y)$:

$$\sigma = \{f(y)/x\} \text{ è un mgu di } \{p(x), p(f(y))\}$$

$\theta = \sigma \circ \{a/y\}$, ma d'altra parte non esiste alcuna sostituzione λ tale che $\sigma = \theta \circ \lambda$.

Se σ è un mgu per $\{E_1, \dots, E_k\}$, vuol dire che:

- σ è un unificatore: $E_1\sigma = E_2\sigma = \dots = E_k\sigma$
- σ è più generale: se $E_1\theta = E_2\theta = \dots = E_k\theta$
allora per qualche λ : $E_i\theta = (E_i\sigma)\lambda$
(θ è “meno generale”: sostituisce più del necessario)

Perché diciamo “un” unificatore più generale?

L'mgu di un insieme di espressioni non è necessariamente unico.

Ad esempio, consideriamo l'insieme di espressioni $S = \{p(x), p(y)\}$:

- $\sigma_1 = \{x/y\}$ è un mgu di S
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ è un mgu di S

σ_1 e σ_2 sono “ugualmente generali”:

$$\sigma_1 = \{x/y\} = \sigma_2 \circ \{x/y\} = \{y/x\} \circ \{x/y\}$$
$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{y/x\}$$

Perché diciamo “un” unificatore più generale?

L'mgu di un insieme di espressioni non è necessariamente unico.

Ad esempio, consideriamo l'insieme di espressioni $S = \{p(x), p(y)\}$:

- $\sigma_1 = \{x/y\}$ è un mgu di S
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ è un mgu di S

σ_1 e σ_2 sono “ugualmente generali”:

$$\sigma_1 = \{x/y\} = \sigma_2 \circ \{x/y\} = \{y/x\} \circ \{x/y\}$$
$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{y/x\}$$

- $\sigma_3 = \{z/y, z/x\}$ è un mgu di S

$$\sigma_1 = \{x/y\} = \sigma_3 \circ \{x/z\} = \{z/y, z/x\} \circ \{x/z\}$$
$$\sigma_3 = \{z/y, z/x\} = \sigma_1 \circ \{z/y, z/x\} = \{x/y\} \circ \{z/y, z/x\}$$

Anche σ_1 e σ_3 sono “ugualmente generali”

Algoritmo di unificazione di Robinson per due espressioni

Definizione. Siano A e B due espressioni e sia k la posizione più a sinistra in cui le due sequenze di simboli differiscono. L'insieme $\{e_1, e_2\}$ delle due **sottoespressioni** che iniziano alla posizione k in A e B si chiama il **disagreement set** di A e B .

Sottoespressione di un'espressione E : sottosequenza dei simboli di E che costituisce essa stessa un'espressione

Esempio: se $A = p(x, f(c), x)$, $B = p(x, g(y, a), z)$, il disagreement set di A e B è:

$$\{f(c), g(y, a)\}$$

Algoritmo di unificazione per due espressioni

Algoritmo: calcola $mgu(A, B)$

- Inizializzazione:

$$\begin{array}{ll} A_0 = A & \sigma_0 = \emptyset \\ B_0 = B & i = 0 \end{array}$$

- Ciclo:

- Se $A_i = B_i$: uscire dal ciclo, con risultato σ_i , altrimenti proseguire
- Sia $\{e, e'\}$ il disagreement set di A_i e B_i . Consideriamo i seguenti casi:

- 1 se un elemento di $\{e, e'\}$ è una variabile x_j e l'altro un'espressione e_j **in cui non occorre x_j** , allora porre:

$$\begin{array}{l} \sigma_{i+1} = \sigma_i \circ \{e_j/x_j\} \\ A_{i+1} = A_i\{e_j/x_j\} \\ B_{i+1} = B_i\{e_j/x_j\} \end{array}$$

e proseguire nel ciclo.

- 2 altrimenti uscire dal ciclo e riportare un fallimento: $\{A, B\}$ non è unificabile

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set:

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set: $\{a, y\}$

y non occorre in a , quindi:

$$\sigma_1 =$$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set: $\{a, y\}$

y non occorre in a , quindi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$$

$$A_1 =$$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set: $\{a, y\}$

y non occorre in a , quindi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$$

$$A_1 = A_0 \{a/y\} = p(a, x) \{a/y\} = p(a, x)$$

$$B_1 =$$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set: $\{a, y\}$

y non occorre in a , quindi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$$

$$A_1 = A_0 \{a/y\} = p(a, x) \{a/y\} = p(a, x)$$

$$B_1 = B_0 \{a/y\} = p(y, f(y)) \{a/y\} = p(a, f(a))$$

- $A_1 \neq B_1$

disagreement set:

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set: $\{a, y\}$

y non occorre in a , quindi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$$

$$A_1 = A_0 \{a/y\} = p(a, x) \{a/y\} = p(a, x)$$

$$B_1 = B_0 \{a/y\} = p(y, f(y)) \{a/y\} = p(a, f(a))$$

- $A_1 \neq B_1$

disagreement set: $\{x, f(a)\}$

x non occorre in $f(a)$, quindi:

$$\sigma_2 =$$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set: $\{a, y\}$

y non occorre in a , quindi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$$

$$A_1 = A_0 \{a/y\} = p(a, x) \{a/y\} = p(a, x)$$

$$B_1 = B_0 \{a/y\} = p(y, f(y)) \{a/y\} = p(a, f(a))$$

- $A_1 \neq B_1$

disagreement set: $\{x, f(a)\}$

x non occorre in $f(a)$, quindi:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{f(a)/x\} = \{a/y\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/y, f(a)/x\}$$

$$A_2 =$$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set: $\{a, y\}$

y non occorre in a , quindi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$$

$$A_1 = A_0 \{a/y\} = p(a, x) \{a/y\} = p(a, x)$$

$$B_1 = B_0 \{a/y\} = p(y, f(y)) \{a/y\} = p(a, f(a))$$

- $A_1 \neq B_1$

disagreement set: $\{x, f(a)\}$

x non occorre in $f(a)$, quindi:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{f(a)/x\} = \{a/y\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/y, f(a)/x\}$$

$$A_2 = A_1 \{f(a)/x\} = p(a, x) \{f(a)/x\} = p(a, f(a))$$

$$B_2 =$$

Algoritmo di unificazione: esempio 1

$$A = p(a, x), B = p(y, f(y))$$

- $A_0 = p(a, x), B_0 = p(y, f(y)), \sigma_0 = \emptyset, i = 0$

- $A_0 \neq B_0$

disagreement set: $\{a, y\}$

y non occorre in a , quindi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/y\} = \{a/y\}$$

$$A_1 = A_0 \{a/y\} = p(a, x) \{a/y\} = p(a, x)$$

$$B_1 = B_0 \{a/y\} = p(y, f(y)) \{a/y\} = p(a, f(a))$$

- $A_1 \neq B_1$

disagreement set: $\{x, f(a)\}$

x non occorre in $f(a)$, quindi:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{f(a)/x\} = \{a/y\} \circ \{f(a)/x\} = \{a/y, f(a)/x\}$$

$$A_2 = A_1 \{f(a)/x\} = p(a, x) \{f(a)/x\} = p(a, f(a))$$

$$B_2 = B_1 \{f(a)/x\} = p(a, f(a)) \{f(a)/x\} = p(a, f(a))$$

- $A_2 = B_2$, quindi l'mgu di A e B è $\sigma_2 = \{a/y, f(a)/x\}$

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	fallimento

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	fallimento

Esempio 4

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, a)$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	fallimento

Esempio 4

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, a)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{a})$	

Rappresentazione compatta

Esempio 1

A	B	σ
$p(\mathbf{a}, x)$	$p(\mathbf{y}, f(y))$	$y \mapsto a$
$p(a, \mathbf{x})$	$p(a, \mathbf{f(a)})$	$x \mapsto f(a)$
$p(a, f(a))$	$p(a, f(a))$	

Esempio 2

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, a)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y) \mapsto \mathbf{f(a)}$
$p(f(y), \mathbf{a})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	$y \mapsto a$
$p(f(a), a)$	$p(f(a), a)$	

Esempio 3

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, y)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{y})$	fallimento

Esempio 4

A	B	σ
$p(\mathbf{x}, x)$	$p(\mathbf{f(y)}, a)$	$x \mapsto f(y)$
$p(f(y), \mathbf{f(y)})$	$p(f(y), \mathbf{a})$	fallimento

Esercizio 7 del Paragrafo 4.6 delle Dispense

Si mostrino l'esecuzione, stadio per stadio, ed il risultato dell'algoritmo di unificazione di Robinson sulle seguenti coppie di espressioni:

- 1 $A = p(x), B = p(f(y))$
- 2 $A = p(x, f(a)), B = p(c, f(x))$
- 3 $A = p(x, f(a)), B = p(c, f(y))$
- 4 $A = p(x, x), B = p(f(y), y)$
- 5 $A = p(x, f(c), x), B = p(f(y), y, z)$
- 6 $A = p(x, f(c), x), B = p(f(y), y, c)$